Mathématiques, Problème 2

Ce problème est dédié à la construction de certains sous-groupes du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de déterminant égal à 1, ainsi que du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que nous définirons ci-dessous.

Nous rappelons que si K est un groupe, le sous-groupe engendré par des éléments $x_1, \dots, x_k \in K$ est le plus-petit sous-groupe de K contenant $x_1, \dots, x_k$.

Soit G un groupe (dont l'élément neutre sera noté e), et soit H et H' deux sous-groupes de G. On dit que G est le *produit libre* de H et H' si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- G est engendré par les éléments de H et de H'.
- Soit n un entier positif, et soit $g_1, \dots, g_n$ dans $H \cup H'$, tous différents de e. Supposons que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a soit ($g_i \in H$ et $g_{i+1} \in H'$) soit ($g_i \in H'$ et $g_{i+1} \in H$). Alors

$$g_1 \dots g_n \neq e.$$

Si G est le *produit libre* de H et H', on notera $G = H * H'$.

1. Soit G un groupe. Supposons que G est le produit libre de sous-groupes H et H'.
   (a) Montrer que $H \cap H' = \{e\}$.
   (b) On suppose que ni H ni H' ne sont réduits au groupe trivial $\{e\}$. Prouver que G n'est *pas* abélien.
   (c) Soit $\widetilde{G}$ un groupe et $f : H \to \widetilde{G}$ et $f' : H' \to \widetilde{G}$ des morphismes de groupes. Montrer qu'il existe un *unique* morphisme de groupes $\widetilde{f} : G \to G'$ tel que $\widetilde{f}_{|H} = f$ et $\widetilde{f}_{|H'} = f'$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

   Pour tout entier $i > 0$, soit n_i et m_i des entiers non-nuls. On définit une suite

$$M_0 = \mathrm{Id},\ M_{2i+1} = M_{2i} A^{n_i} \text{ et } M_{2i+2} = M_{2i+1} B^{m_i}.$$

   Soit i un entier, on note $c(2i)$ le coefficient d'indice $(1,1)$ dans M_{2i}, et $c(2i+1)$ le coefficient d'indice $(1,2)$ dans M_{2i+1},de telle sorte que

$$M_{2i} = \begin{pmatrix} c(2i) & * \\ * & * \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{M_{2i+1}} = \begin{pmatrix} * & c(2i+1) \\ * & * \end{pmatrix}.$$

   On note aussi H le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par A et H' le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par B. Soit G le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par A et B.
   (a) Supposons que $a, b \geq 2$.
      i. Montrer que $|c(n)| \geq n+1$ pour tout $n > 0$.
      ii. En déduire que $G = H * H'$.
      iii. Montrer que G est un groupe discret :pour tout $g \in G$, il existe un ouvert U dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $U \cap G = \{g\}$.
   (b) Supposons $a = b = 1$. A-t-on $G = H * H'$?
3. On considère désormais les matrices dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ comme des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. On garde les notations précdentes et G, H, H' sont définis comme en 2.
   (a) Montrer qu'il existe 2 ouverts non-vides disjoints X et X' de $\mathbb{R}^2$ tel que
      - si $h \in H \setminus \{\mathrm{Id}\}$, alors $h(X) \subset X'$,
      - si $h \in H' \setminus \{\mathrm{Id}\}$, alors $h(X') \subset X$.
   (b) Soit n un entier positif, soit $h_0, \dots, h_n$ des éléments de $H \setminus \{\mathrm{Id}\}$ et soit $h'_1, \dots, h'_n$ dans $H' \setminus \{\mathrm{Id}\}$. En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$h_0 h'_1 h_1 \dots h'_n h_n \neq \mathrm{Id}.$$

   (c) Sans utiliser les résultats de la question 2, montrer à nouveau que $G = H * H'$.

4. On introduit un nouvel élément noté ∞, et on définit $\overline{\mathbb{R}}$ comme la réunion de $\mathbb{R}$ et $\{\infty\}$. Soit alors $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ le groupe des fonctions

$$f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$$

telles que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ si $x \in \mathbb{R}$ et $cx+d \neq 0$, $f(x) = \infty$ si $cx+d = 0$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$ si $c \neq 0$ et $f(\infty) = \infty$ si $c = 0$, où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et $ad - bc = 1$. La loi de groupe est donnée par la composition de fonctions.

   (a) Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est bien un groupe, et montrer qu'il existe un morphisme de groupe surjectif $\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Quel est son noyau ?

   (b) Montrer qu'il existe exactement deux éléments S et T de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$S(x) = \frac{-1}{x} \text{ et } T(x) = x+1$$

   pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Soit H le sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ engendré par S, et soit H' le sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ engendré par T. Soit G le sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ engendré par S et T.

   (c) Montrer que H et H' sont des groupes cycliques finis.

   (d) Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints non-vides X et X' de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que
   - si $h \in H \setminus \{\mathrm{Id}\}$, alors $h(X) \subset X'$,
   - si $h \in H' \setminus \{\mathrm{Id}\}$, alors $h(X') \subset X$.

   (e) Montrer que $G = H * H'$.

5. On note $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ le sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ des f tels que $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

   (a) Montrer que $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

   (b) Soit $\tilde{S}$ et $\tilde{T}$ des éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ tels que $\rho(\tilde{S}) = S$, $\rho(\tilde{T}) = T$; on note $\tilde{H}$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\tilde{S}$ et $\tilde{H}'$ le sous-groupe engendré par $\tilde{T}$. On note enfin $\tilde{G}$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\tilde{S}$ et $\tilde{T}$.

      i. Montrer que $\tilde{G} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

      ii. Montrer que $\tilde{G}$ n'est *pas* le produit libre $\tilde{H} * \tilde{H}'$.